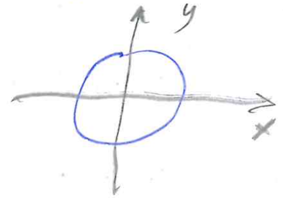
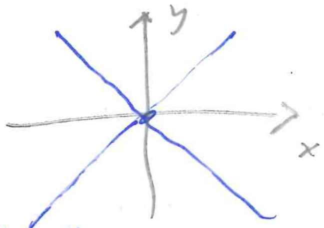
Il teorema della funzione implicita (di Dini).

Se $z = f(x,y)$ è una funzione $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, l'equazione $f(x,y)=0$ spesso definisce una <u>curva</u> in qualche senso.

(i) $f(x,y) = x^2+y^2-1=0$:



(ii) $g(x,y) = y^2-x^2=0$:



I due esempi mostrano come (i) non possa in generale "globalmente" pensare $\Gamma(f) = \{(x,y) : f(x,y)=0\}$ come il grafico di <u>una</u> funzione $x \mapsto \varphi(x)$ (ne servono <u>due</u>);
(ii) vi siano punti in cui $\Gamma(g)$ non assomiglia proprio a una curva (l'origine, in questo caso).

- Senza ipotesi su f, $\Gamma(f)$ può essere qualsiasi cosa: sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{altrimenti} \\ 0 & \text{se } (x,y) \in E \end{cases}$
Allora $\Gamma(f) = E$.

- ~~Esercizio~~ Se $K \subseteq \mathbb{R}^2$ è ~~continua~~ chiuso, allora $K = \Gamma(f)$ dove $f(z) = d(z,K) = \min\{\|z-x\| : x \in K\}$ è continua.

<u>Teorema di Dini</u>. Sia $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ con $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ aperto, e sia $(a,b) \in U$ tale che (i) $f(a,b)=0$; $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$;
(ii) $J_y f(a,b)$ è invertibile,
dove $J_y f(a,b) = \left[\frac{\partial f}{\partial y_1}(a,b) \middle| \cdots \middle| \frac{\partial f}{\partial y_m}(a,b)\right] \in \mathbb{R}^{m \times m}$.
Allora $\exists V \subseteq \mathbb{R}^n$ $\exists W \subseteq \mathbb{R}^m$: $a \in V$; $b \in W$; $V \times W \subseteq U$ e $\forall x \in V$ $\exists ! y \in W$:
$f(x,y)=0$ e $\exists J_y f(x,y)^{-1}$.
Posto $y = \varphi(x)$, abbiamo $\varphi \in C^1(V; \mathbb{R}^m)$
e $J\varphi(x) = -J_y f(x,y)^{-1} J_x f(x,y)$.

<u>dim.</u> Pongo $G(x,y) = (x, f(x,y))$
$G \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+m})$.
Ho che
$$JG(x,y) = \begin{array}{cc} n & m \\ \left[\begin{array}{c|c} Id & 0 \\ \hline J_x f(x,y) & J_y f(x,y) \end{array}\right] & \begin{array}{c} n \\ m \end{array} \end{array}$$
$\Rightarrow \det(JG(a,b)) = \det(Id) \cdot \det(J_y f(a,b)) \neq 0$.

Per il Teorema della funzione inversa, $\exists U' \subseteq U$ aperto, $(a,b) \in U'$,
$U' \xrightarrow{G} G(U') \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ aperto, biunivoca con inversa C^1.

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$: $V = \{x$ t.c. $\exists y \in \mathbb{R}^m$ con $(x,y) \in U'$ e $f(x,y) = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathbb{R}^m$ con $(x,y) \in U'$ e $G(x,y) = (x,0)\}$

V è aperto in $\mathbb{R}^n$. Se infatti $x_0 \in V$, allora $\exists r > 0$: $B((x_0,0), r) \subseteq G(U')$, che è aperto; quindi $\|x - x_0\| < r \Rightarrow$

$\exists (x', y) \in U'$: $G(x', y) = (x, 0)$

Ma $G(x', y) = (x', f(x', y))$, dunque

$x' = x$ e $f(x,y) = 0$, cioè $x \in V$.

Se $x \in V$, solo per un unico $y \in \mathbb{R}^m$ abbiamo che (i) $(x,y) \in U'$
(ii) $f(x,y) = 0$.

Se ciò valesse per y' e y'':

$G(x,y') = (x, f(x,y')) = (x,0) =$
$= (x, f(x,y'')) = G(x,y'')$,

quindi $y' = y''$ perché G è iniettiva in U'!

Abbiamo dunque $V \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^m$, $x \longmapsto y = \varphi(x)$,

unico con le proprietà $(x, \varphi(x)) \in U'$ e $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Ora: $G(x, \varphi(x)) = (x, f(x, \varphi(x))) = (x, 0)$ $\forall x \in V$, dunque

$(x, \varphi(x)) = G^{-1}(x, 0)$. Ma $G^{-1} \in C^1$, quindi anche $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R}^m)$.

Infine, calcolando la Jacobiana di composizioni, da

$$0 = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in V$$

abbiamo (con $y = \varphi(x)$)

$$0 = J_x f(x,y) + J_y f(x,y) \cdot J\varphi(x)$$

cioè

$$J\varphi(x) = -J_y f(x,y)^{-1} J_x f(x,y)$$

<u>OSS.</u> Il caso $\boxed{n=1}$ è di particolare interesse. Il teorema del DINI potrebbe essere riformulato in termini di <u>Equazioni Differenziali Ordinarie</u>.

Sia $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ con $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aperto, sia poi $(a,b) \in U$ t.c. $\exists J_y f(a,b)^{-1}$.
Allora esiste ed è unica $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$, $I \ni a$, I intervallo, tale che con $y = \varphi(x)$ si ha

$$(*) \begin{cases} \text{(E)} & \dfrac{dy}{dx} = -J_y f(x,y)^{-1} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y), \\ \text{(CI)} & y(a) = b \end{cases}$$

<u>Unicità</u> significa che se $\psi \in C^1(J, \mathbb{R}^m)$, $J \ni a$, soddisfa $(*)$, allora $\psi(x) = \varphi(x)$ $\forall x \in I \cap J$.
(E) è una particolare <u>equazione differenziale</u> e (CI) è la <u>condizione iniziale</u>